

Тема: Розв'язування типових вправ. Самостійна робота.

Мета:

- *Навчальна:* закріпити знання учнів за темами «Визначений інтеграл, площа криволінійної трапеції та площі фігур обмежених даними лініями»
- *Розвиваюча:* продовжувати формувати та розвивати навички учнів розв'язувати математичні задачі та застосовувати отримані знання;
- *Виховна:* виховувати наполегливість, вміння правильно планувати особистий час на виконання завдання;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією, розв'язувати задачі математичного змісту, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: закріплення знань та вмінь;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, картки із завданнями та розв'язками самостійної роботи, мультимедійне обладнання;

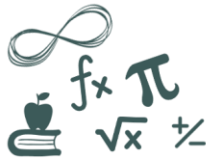
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
($S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$)
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$



- Як обчислити визначений інтеграл?

- Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
- Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
- Знайти різницю $F(b) - F(a)$;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

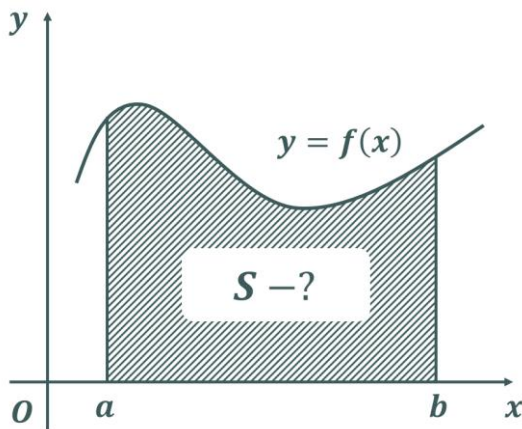
- Чи можна виносити сталий множник за знак інтеграла?

(Так, сталий множник можна виносити за знак інтеграла)

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

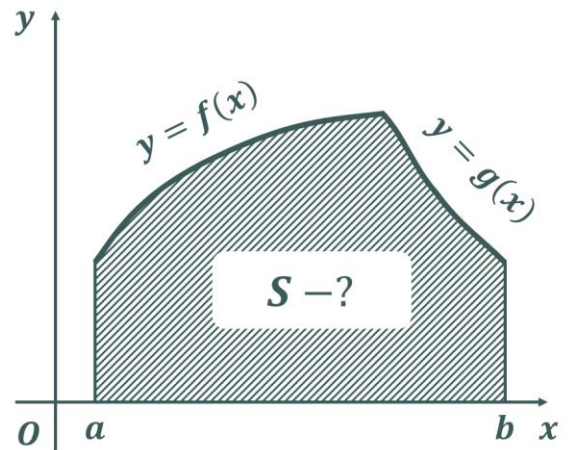
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

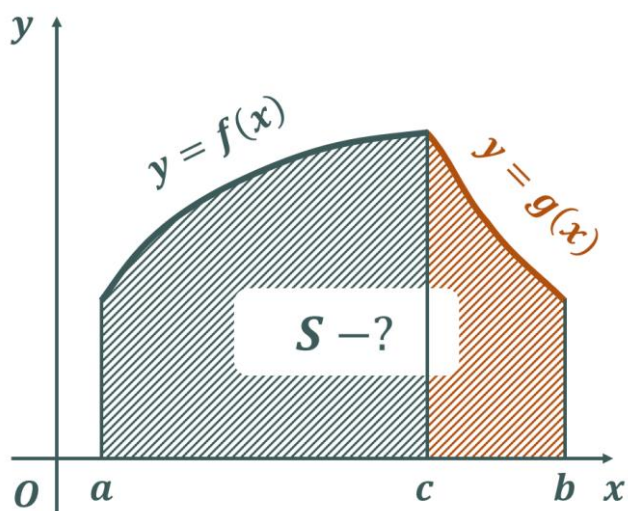
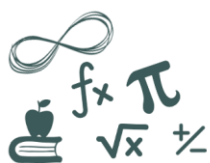


➤ За якою формулою можемо знайти площу криволінійної трапеції?

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

➤ Як можемо знайти площу цієї фігури?

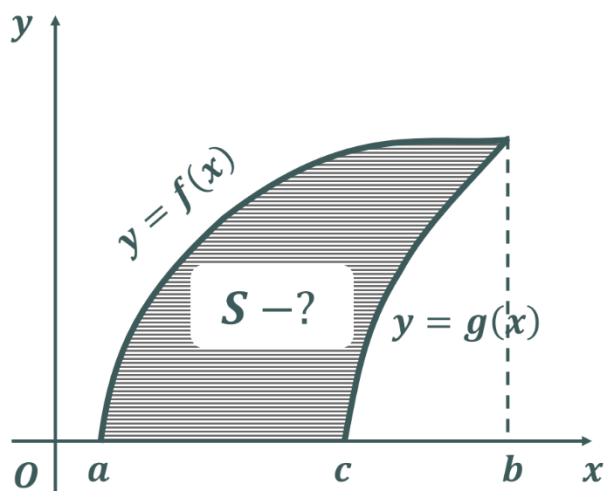




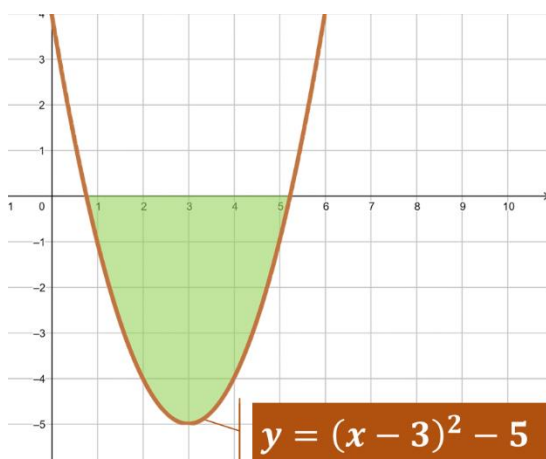
$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

- За якою формулою можемо знайти площу цієї фігури?

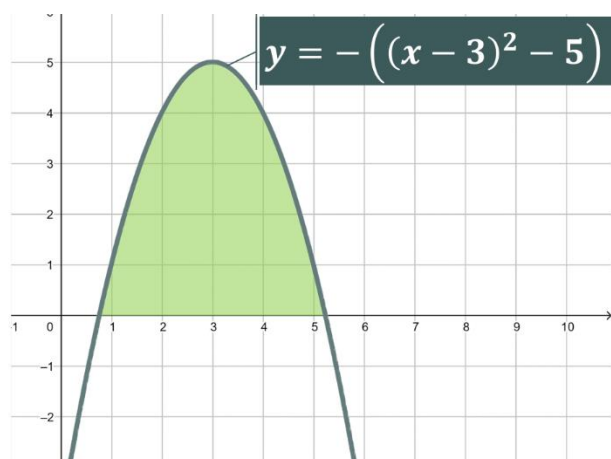
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx$$

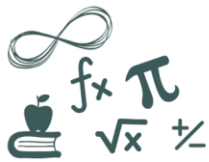


- Чи будуть ці площі рівними?



(Так)



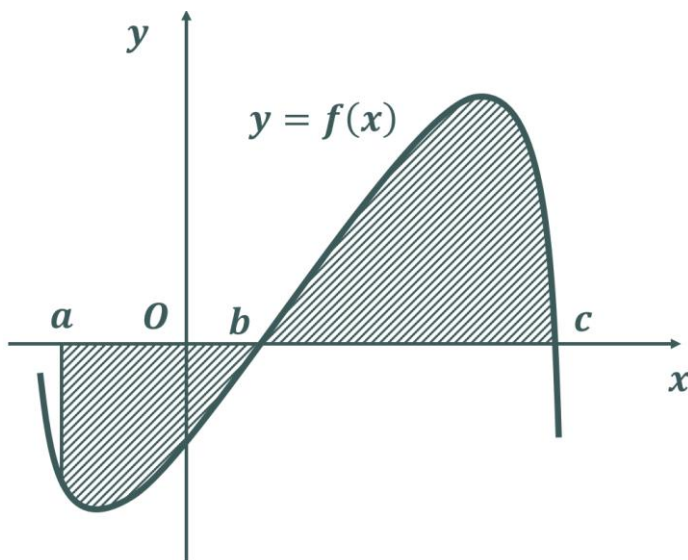
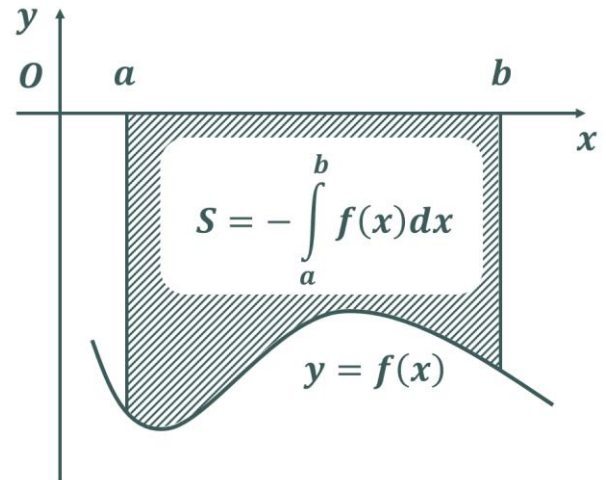
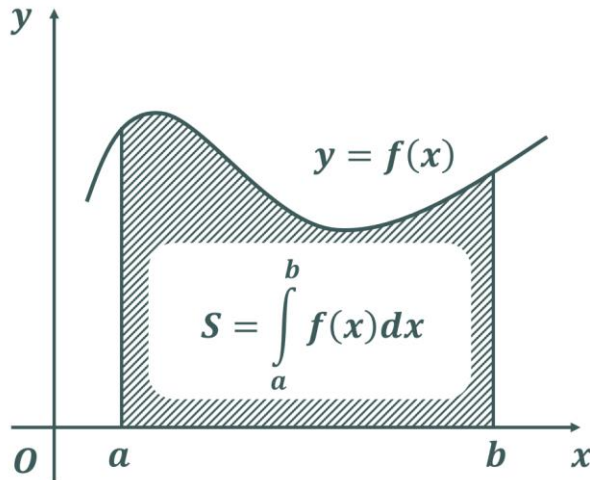


Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС



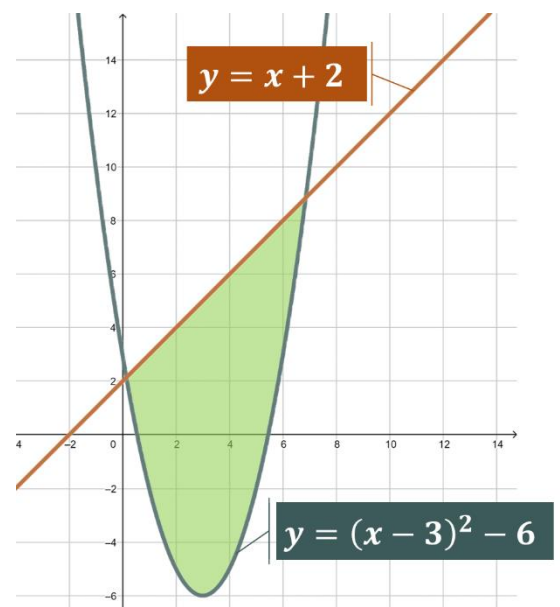
➤ Який можемо зробити висновок?

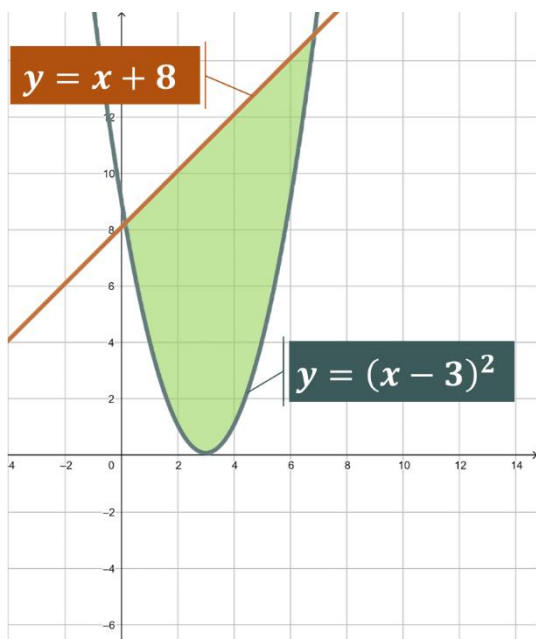
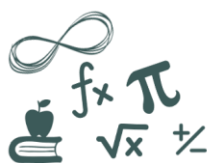


➤ Як знайти площу такої фігури?

$$S = -\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

➤ Як знайти площу такої фігури?
(Учні висловлюють власні ідеї)





- Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю Ox та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.

За умовою очевидно, що графік функції $y = (x - 3)^2 - 6$ опущено вниз на 6 одиниць, тому «підніmemo» нашу шукану площу фігури на 6 одиниці паралельно осі ординат.

Перенесена нами на 6 одиниць паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями $y = (x - 3)^2$ та $y = x + 8$.

III. Розв'язування задач

№1

Обчисліть визначений інтеграл:

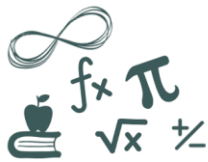
А) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$

Б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$

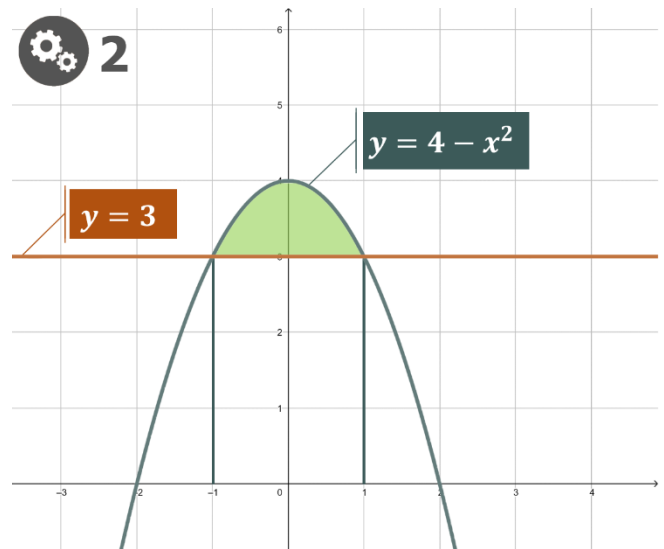
Розв'язок:

А) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_2^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \sqrt{3} - \sqrt{2}$



Виконавши побудову, обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:
 $y = 4 - x^2$, $y = 3$



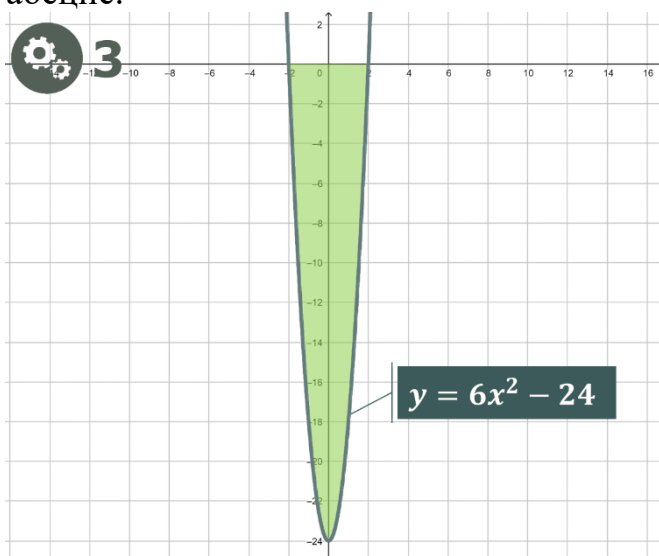
Розв'язок:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx - \int_{-1}^1 3 dx = \int_{-1}^1 (4 - x^2 - 3) dx = 4x - \frac{x^3}{3} - 3x \Big|_{-1}^1 \\ &= x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$ (кв. од.)

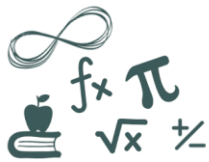
№3

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 6x^2 - 24$ та віссю абсцис.



*Площа шуканої фігури знаходиться під віссю абсцис, тому застосуємо наступну формулу:

$$S = - \int_a^b f(x) dx$$



Знайдемо точки перетину графіку функції $y = 6x^2 - 24$ з віссю Ox :

$$6x^2 - 24 = 0$$

$$6(x^2 - 4) = 0$$

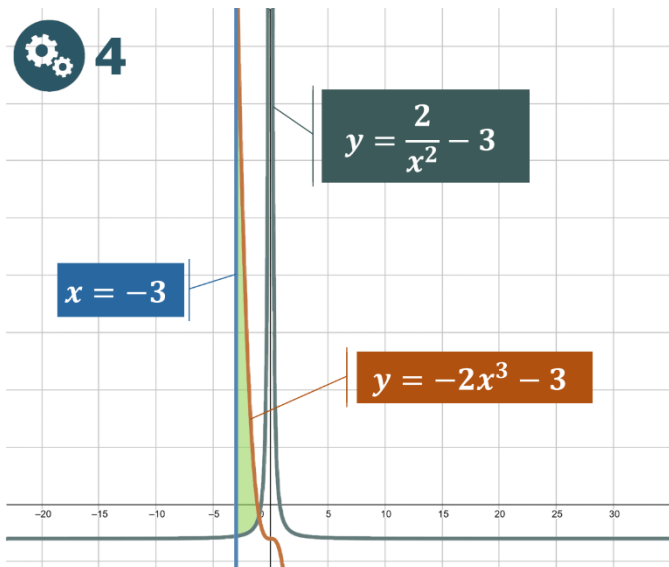
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Межі інтегрування} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-2}^2 (6x^2 - 24) dx = - \left(\frac{6x^3}{3} - 24x \right) \Big|_{-2}^2 = -(2x^3 - 24x) \Big|_{-2}^2 \\ &= - \left((2 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2) - (2 \cdot (-2)^3 - 24 \cdot (-2)) \right) \\ &= -(-32 - 32) = 64 \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: 64 (кв. од.)

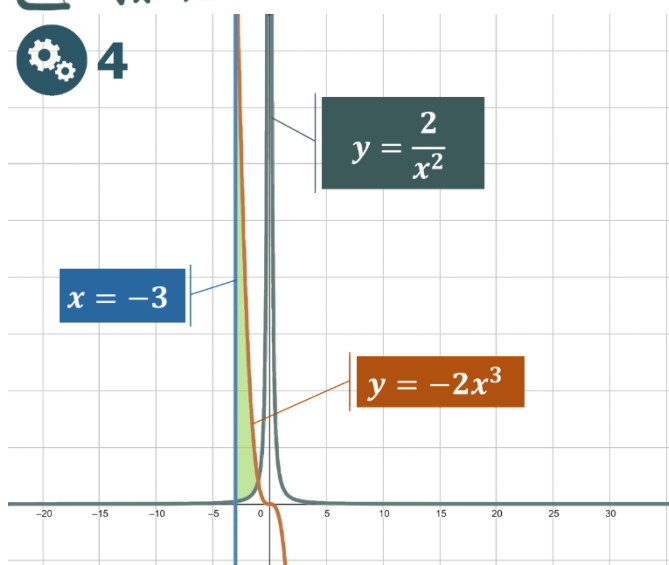
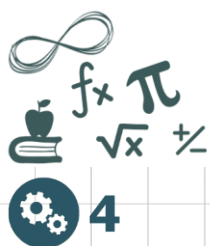
№4

Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{2}{x^2} - 3$, $y = -2x^3 - 3$ та прямою $x = -3$.



*Площа шуканої фігури знаходиться одночасно над віссю Ox та під нею, тому перенесемо площу шуканої фігури на необхідну нам кількість одиниць паралельно осі ординат.

- За умовою очевидно, що графіки функцій опущені вниз на 3 одиниці, тому піднінемо нашу шукану площу фігури на 3 одиниці паралельно осі ординат.



*Перенесена нами на 3 одиниці паралельно осі ординат площа шуканої фігури буде обмежена лініями $y = \frac{2}{x^2}$, $y = -2x^3$ та прямою $x = -3$

- Знайдемо точку перетину графіків функцій $y = \frac{2}{x^2}$ та $y = -2x^3$:

$$\frac{2}{x^2} = -2x^3$$

$$2 = -2x^5$$

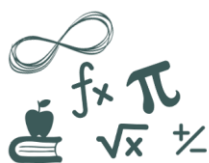
$$x^5 = -1$$

$$x = -1 \text{ (Верхня межа інтегрування)}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (-2x^3) dx - \int_{-3}^{-1} \frac{2}{x^2} dx = \int_{-3}^{-1} \left(-2x^3 - \frac{2}{x^2} \right) dx = -\frac{2x^4}{4} + \frac{2}{x} \Big|_{-3}^{-1} \\ &= \left(-\frac{2 \cdot (-1)^4}{4} + \frac{2}{(-1)} \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-3)^4}{4} + \frac{2}{(-3)} \right) \\ &= -\frac{2}{4} - 2 + \frac{162}{4} + \frac{2}{3} = 38\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)} \end{aligned}$$

Відповідь: $38\frac{2}{3}$ (кв. од.)

Самостійна робота



IV. Підсумок уроку

- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
- Як обчислити визначений інтеграл?
- Чи можна виносити сталий множник за знак інтеграла?
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

V. Домашнє завдання

Повторити §2 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Мерзляк А.Г.
Повторити §8-10 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Істер О.С.
Повторити §6-7 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Нелін Є.П.
Повторити §5-8 Виконати завдання № 4-6 протилежного варіанту самостійної роботи	Бевз Г.П.